フーリエ変換と関連公式の高次元化

- フーリエ変換の高次元拡張

1次元フーリエ変換 $F(k_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) \exp\{-2\pi i k_1 x_1\} dx_1$

2次元フーリエ変換

$$F(k_1, k_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) \exp\{-2\pi i (k_1 x_1 + k_2 x_2)\} dx_1 dx_2$$

3次元フーリエ変換

$$F(k_1, k_2, k_3) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3) \exp\{-2\pi i (k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)\} dx_1 dx_2 dx_3$$

⋮

n次元フーリエ変換

$$F(k_1, k_2 \cdots k_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 \cdots x_n) \exp\{-2\pi i \sum_{i}^{n} k_i x_i\} \prod_{i=1}^{n} dx_i$$

同様にして n次元逆フーリエ変換は

$$f(x_1 \cdots x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(k_1 \cdots k_n) \exp\{2\pi i \sum_{i=1}^{n} k_i x_i\} \prod_{i=1}^{n} dk_i$$

となる。

またn次元デルタ関数 $\delta(x_1 \cdots x_n)$ は

$$\delta(x_1 \cdots x_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \sum_{i=1}^{n} k_i x_i} \prod_{i=1}^{n} dk_i$$

〈n次元フーリエ変換と逆変換の証明〉

$$F(k_1 \cdots k_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(k_1' \cdots k_n') \exp\{2\pi i \sum_{i=1}^{n} k_i' x_i\} \prod_{i=1}^{n} dk_i' \right] \times \exp\{-2\pi i \sum_{i=1}^{n} k_i x_i\} \prod_{i=1}^{n} dx_i$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(k_1' \cdots k_n') \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{2\pi i \sum_{i=1}^{n} (k_i' - k_i) x_i\} \prod_{i=1}^{n} dx_i \right] \prod_{i=1}^{n} dk_i'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(k_1' \cdots k_n') \delta(k_1 - k_1', k_2 - k_2' \cdots k_n - k_n') \prod_{i=1}^{n} dk_i'$$

$$= F(k_1 \cdots k_n)$$ (証明終わり)

フーリエ変換の投影定理の高次元拡張

まず3次元のフーリエ変換投影定理を示す。

$$F(k_1, k_2, k_3) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3) \exp\{-2\pi i (k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)\} dx_1 dx_2 dx_3$$

$K_3 = 0$ とおくと

$$F(k_1, k_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3) \exp\{-2\pi i (k_1 x_1 + k_2 x_2)\} dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 \right]} \exp\{-2\pi i (k_1 x_1 + k_2 x_2)\} dx_1 dx_2$$

これは 3次元空間の原点を通る平面でのフーリエ変換は もとの3次元空間をフーリエ変換したものを投影したものということを示している。

同様にして n次元に拡張できる。

$$F(k_1 \cdots k_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 \cdots x_n) \exp\{-2\pi i \sum_{i=1}^{n} k_i x_i\} \prod_{i=1}^{n} dx_i$$

$K_3 \sim K_n = 0$ とおくと

$$F(k_1, k_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 \cdots x_n) \prod_{i=3}^{n} dx_i \right] \times \exp\{-2\pi i (k_1 x_1 + k_2 x_2)\} dx_1 dx_2$$

これは n次元空間の原点を通る平面での フーリエ変換は もとのn次元空間をフーリエ変換したものを投影したものということを示している。

コンボリューション定理の高次元拡張

[3次元では]

$$\mathcal{F}[f(\mathbf{r}) \otimes g(\mathbf{r})] = \mathcal{F}[f(\mathbf{r})] \times \mathcal{F}[g(\mathbf{r})]$$

ただし $f(\mathbf{r}) \otimes g(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}') g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$

n次元では $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}'$ が n次元ベクトルになる。

[証明]

$$F(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}_1) e^{-2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} d\mathbf{r}_1$$

$$G(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{r}_2) e^{-2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2} d\mathbf{r}_2$$

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ は n次元ベクトル

$F(\mathbb{k}) \times G(\mathbb{k})$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{2n\text{コ}} f(\mathbb{r}_1)g(\mathbb{r}_2)e^{-2\pi i \mathbb{k}(\mathbb{r}_1+\mathbb{r}_2)}d\mathbb{r}_1 d\mathbb{r}_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}dx_1\int_{-\infty}^{\infty}dx_2\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_n\int_{-\infty}^{\infty}dx_1'\int_{-\infty}^{\infty}dx_2'\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_n'$$

$$\left[f(\mathbb{r}_1)g(\mathbb{r}_2)\exp\left[-2\pi i k_1(x_1+x_1')-2\pi i k_2(x_2+x_2')\cdots-2\pi i k_n(x_n+x_n')\right]\right]$$

$$※\begin{pmatrix} \mathbb{r}_1=(x_1, x_2\cdots x_n),\ \mathbb{r}_2=(x_1'\cdots x_n') \\ \mathbb{k}=(k_1,k_2,\cdots k_n) \end{pmatrix}$$

ここで

$$\mathbb{r}_1+\mathbb{r}_2=\begin{pmatrix} x_1+x_1' \\ x_2+x_2' \\ \vdots \\ x_n+x_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\mathbb{r} \text{ とおく。}$$

$$f(\mathbb{r}_1)g(\mathbb{r}_2)\exp\left[-2\pi i k_1(x_1+x_1')\cdots-2\pi i k_n(x_n+x_n')\right]$$

$$= f(\mathbb{r}_1)g(\mathbb{r}-\mathbb{r}_1)\exp\left[-2\pi i \mathbb{k}\cdot\mathbb{r}\right]$$

また $dx_1'dx_2'\cdots dx_n' = \dfrac{\partial(x_1' x_2'\cdots x_n')}{\partial(a_1\cdots a_n)}da_1 da_2\cdots da_n$

$$\frac{\partial(x_1'\cdots x_n')}{\partial(a_1 a_2\cdots a_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1'}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1'}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial x_1'}{\partial a_n} \\ \frac{\partial x_2'}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2'}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial x_2'}{\partial a_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n'}{\partial a_1} & \frac{\partial x_n'}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial x_n'}{\partial a_n} \end{vmatrix}$$

$$= |E_n| = 1$$

ゆえに $dx_1'dx_2'\cdots dx_n' = da_1 da_2\cdots da_n$

よって $F(\mathbb{k})\times G(\mathbb{k})$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}dx_1\int_{-\infty}^{\infty}dx_2\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_n\int_{-\infty}^{\infty}da_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}da_n$$

$$\left[f(\mathbb{r}_1)g(\mathbb{r}-\mathbb{r}_1)\right]\exp\left[-2\pi i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(\mathbb{r}_1)g(\mathbb{r}-\mathbb{r}_1)d\mathbb{r}_1\right]d\mathbb{r}$$

$$= \mathcal{T}\left[f(\mathbb{r})\otimes g(\mathbb{r})\right]$$ (証明おわり)

・ペンローズ格子 (2次元準周期格子)

ペンローズ格子は5次元単位格子の頂点に菱形20面体(占有領域)をコンボリューションしたもののある断面である。

5次元を2次元平面に表現することはできないので、解析的にしか解けない。

1次元準結晶の作成方法と同様に、以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} x_{外} \\ y_{外} \\ x_{内} \\ y_{内} \\ z_{内} \end{bmatrix}=\sqrt{\frac{2}{5}}\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{4\pi}{5} & \cos\frac{6\pi}{5} & \cos\frac{8\pi}{5} & \cos\frac{10\pi}{5} \\ \sin\frac{2}{5}\pi & \sin\frac{4}{5}\pi & \sin\frac{6}{5}\pi & \sin\frac{8}{5}\pi & \sin\frac{10}{5}\pi \\ \cos\frac{4}{5}\pi & \cos\frac{8}{5}\pi & \cos\frac{12}{5}\pi & \cos\frac{16}{5}\pi & \cos\frac{20}{5}\pi \\ \sin\frac{4}{5}\pi & \sin\frac{8}{5}\pi & \sin\frac{12}{5}\pi & \sin\frac{16}{5}\pi & \sin\frac{20}{5}\pi \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{行列A}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \end{bmatrix}$$

行列Aは直交行列になっている。

$$\begin{bmatrix} x_{内} \\ y_{内} \\ z_{内} \end{bmatrix}=\sqrt{\frac{2}{5}}\begin{bmatrix} n_1\cos\frac{4}{5}\pi+n_2\cos\frac{8}{5}\pi+n_3\cos\frac{12}{5}\pi+n_4\cos\frac{16\pi}{5}+n_5\cos\frac{20\pi}{5} \\ n_1\sin\frac{4}{5}\pi+\sin\frac{8}{5}\pi+n_3\sin\frac{12}{5}\pi+n_4\sin\frac{16\pi}{5}+n_5\sin\frac{20\pi}{5} \\ \frac{n_1}{\sqrt{2}}+\frac{n_2}{\sqrt{2}}+\frac{n_3}{\sqrt{2}}+\frac{n_4}{\sqrt{2}}+\frac{n_5}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

が菱形20面体の内部にある時、

$$\begin{bmatrix} x_{外} \\ y_{外} \end{bmatrix}=\sqrt{\frac{2}{5}}\begin{bmatrix} n_1\cos\frac{2\pi}{5}+n_2\cos\frac{4\pi}{5}+n_3\cos\frac{6\pi}{5}+n_4\cos\frac{8\pi}{5}+n_5\cos\frac{10\pi}{5} \\ n_1\sin\frac{2\pi}{5}+n_2\sin\frac{4\pi}{5}+n_3\sin\frac{6\pi}{5}+n_4\sin\frac{8\pi}{5}+n_5\sin\frac{10\pi}{5} \end{bmatrix}$$

に点をうつことにより ペンローズ格子ができる。